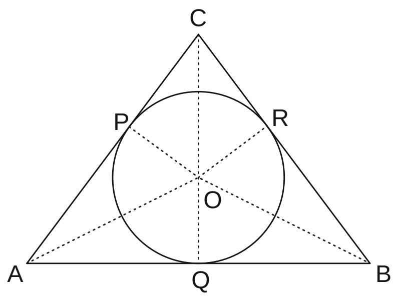
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (23/10/2023)

SOLUZIONI

1. UNA GARA DI CORSA [96]
Passerano sulla linea del traguardo ogni multiplo del tempo che impiegano per fare un giro.
Passeranno per la prima volta assieme dopo $m.c.m.(24,32)=96$ secondi.

2. UN GIORNO DI PESCA [9]
Togliendo alle 36 trote le 12 in più contate e le 6 in più che Obelix ha pescato, restano 18 trote, metà delle quali (9) sono state pescate da Asterix.

3. LE POTENZE [1024]
$$8^{16}:4^{12}:128^2=\frac{2^{3\cdot 16}}{2^{2\cdot 12}\cdot 2^{7\cdot 2}}=2^{48-24-14}=2^{10}=1024$$

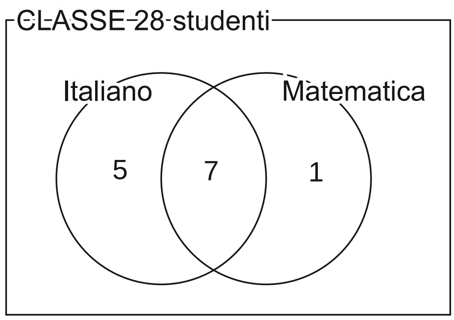
4. IL CERCHIO [15]


Dobbiamo calcolare il raggio della circonferenza inscritta all'interno del triangolo che ha la base di 60 dm e gli altri due lati di 50 dm.
Un modo per farlo è osservare l'area del triangolo ABC può essere scritta come somma delle aree dei triangoli AOB, BOC e AOC, triangoli che hanno per basi i lati del triangolo e per altezza proprio il raggio cercato.
Calcoliamo prima di tutto l'area del triangolo.
Per il Teorema di Pitagora $CQ=\sqrt{BC^2-QB^2}=\sqrt{50^2-30^2}=40\text{ dm}$.

$$A_{ABC}=\frac{AB\cdot CQ}{2}=\frac{60\cdot 40}{2}=1200\text{ dm}^2.$$

$$A_{ABC}=\frac{AB\cdot r}{2}+\frac{BC\cdot r}{2}+\frac{AC\cdot r}{2}=\frac{AB+BC+AC}{2}r=\frac{160}{2}r=80r.$$

Siccome $80r=1200$, $r=15\text{ dm}$.
Vale una formula generale: $r=\dfrac{A}{p}$ dove p è il semiperimetro del triangolo.

5. TUTTI A SCUOLA [15]


Rappresentiamo il problema con un diagramma (a fianco).
Notiamo che il totale degli studenti interrogati è 13 e quindi $28-13=15$ sono gli studenti che non sono stati interrogati.

6. IL TORNEO [78]
Ogni squadra deve giocare con tutte le altre 12 squadre. Cos' facendo però, ogni partita è stata contata due volte.
Il numero di partite necessario è $\dfrac{13\cdot 12}{2}=78$.

7. LA CISTERNA DEL VILLAGGIO [360]
In 30 ore, la prima sorgente riempirebbe la cisterna 3 volte, mentre la seconda 2.
Assieme, in 30 ore ore riempirebbero la cisterna 5 volte. Per riempirla una sola volta basteranno $\dfrac{30}{5}\text{ ore}=6\text{ ore}=360\text{ minuti}$.

8. IL MESSAGGIO DI CESARE [198]

Osservando la colonna delle unità, notiamo che $A+B=10$. Ma A può essere solo 1 in quanto comparendo anche nella colonna delle decine non permetterebbe alla somma totale di superare 200.
Allora $A=1$, $B=9$ e di conseguenza $C=8$. Il numero cercato è 198.

9. IL NUOVO MANIPOLO [24]

Se dopo la prima operazione ne mancano 4 per completare una riga, togliendo un'altra colonna verranno aggiunti 3 legionari (uno in meno rispetto a quelli che mancano) per completare l'ultima riga. Questo ci dice che le righe in origine erano 3 e che sono stati tolti $3+3=6$ legionari per poter avere una formazione completa 6×4 formata da 24 soldati. In origine erano in formazione 8×3.

10. LE MAGLIETTE [5940]

Notiamo che tra i numeri delle maglie 6 sono dispari e 5 sono i pari. Non potendo toglierne 4 dispari e nemmeno 4 pari (infatti devono rimanere due blocchi uniti) dovremo procedere a rimuoverne 2 pari e 2 dispari. Dopo qualche tentativo si trova che la soluzione è rimuovere le magliette 6, 9,10 e 11, lasciando i due blocchi $1+2+3+4+5=7+8=15$.
La soluzione cercata è $6\cdot 9\cdot 10\cdot 11=5940$.

11. L'ORTO DI BENIAMINA [13]

Dopo 5 giorni il coniglio nero avrà finito i cavoli e resteranno 40 carote e 16 rape. Il coniglio nero e quello marrone mangeranno assieme le rape, 4 al giorno. Dopo altri 4 giorni saranno finite anche le rape e resteranno 36 carote. I tre conigli assieme mangeranno 9 carote al giorno terminando la scorta in 4 giorni. Gli ortaggi sono sufficienti per $5+4+4=13$ giorni.

12. OBELIX E LA GEOMETRIA [65]

A parte il primo disegno, Obelix aggiungerà sempre un numero di segmenti pari al numero di lati meno 1.
Il numero totale dei lati sarà quindi $3+3+4+5+...+(n-1)$, dove n indica il numero dei lati dell'ultimo poligono regolare disegnato.

$$3+3+4+5+...+(n-1)=1+2+3+4+5+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

Cerchiamo ora il primo valore per n che rende $\frac{n(n-1)}{2}$ maggiore di 2022.

Ponendo $n=64$ abbiamo $\frac{64\cdot 63}{2}=2016$, quindi con $n=65$ andremo a disegnare il 2022 lato.

13. IL LIBRO DI MAGIA [12]

Risolviamo con una equazione: sia x il numero di pagine totali del libro.

Il promo giorno ha letto $\frac{x}{2}$. Il secondo giorno ne ha lette $\frac{x}{4}$ e Il terzo giorno $\frac{x}{8}$.

$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}=84$, quindi $\frac{7}{8}x=84$ e $x=96$. Restano da leggere $96-84=12$ pagine.

14. IL FRUTTETO [2448]

Siano x le mele e $2x$ le pere. Dopo aver dato metà dei frutti ai due galli ne restano $\frac{x}{2}+x=36$ equazione che risolta porta a trovare $x=24$. Le mele sono 24 e le pere 48.

15. L'UNIONE FA LA FORZA [8]

In 8 hanno prodotto 15 scudi in 2 giorni. Restano da produrre 150 scudi.
In 4 avrebbero prodotto 15 scudi in 4 giorni. Adesso che sono in 20 possono produrre $15\cdot 5=75$ scudi in 4 giorni e quindi completare la produzione in 8 giorni.

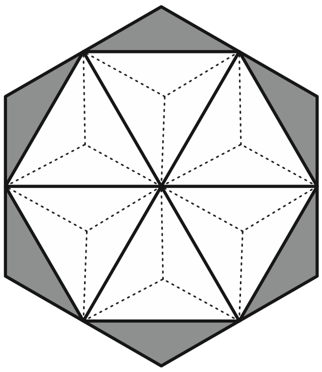
16 LA STRADA [22]

Per come è costruita la tabella le differenze tra i valori di due colonne vicine devono essere sempre uguali, visto che si aggiunge sempre la stessa distanza tra le due città, quindi possiamo immediatmente riempire nel modo seguente:

A							
	B						
		C					
			D				
7	**6**	**5**	**3**	E			
13	**12**	**11**	**9**		F		
24	**23**	**22**	**20**			G	
42	**43**	**44**	**42**				H

Così facendo abbiamo scoperto che la distanza per andare da C a G è di 22 km.

17 LA NUOVA PALIZZATA [1750]



Concentriamoci su uno solo dei due aumenti. Dividendo opportunamente l'esagono interno (vedi figura) si osserva che Il rapporto tra le aree vale:

$$\frac{A_{piccolo}}{A_{grande}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

Analogamente per il secondo aumento di superficie.

$$A_{villaggio\ iniziale} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} 4000 = 2250 \text{ m}^2.$$

L'area della parte grigia vale $4000 - 2250 = 1750 \text{ m}^2$

18. LA SCOMMESSA [23]

Rappresentiamo le uscite dei due dadi in una tabella, ed evidenziamo i casi in cui Obelix vince.

	1	2	3	4	5	6
1		X				
2	X		X			
3		X		X		
4			X		X	
5				X		X
6					X	

Obelix vince con una probabilità di $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

La soluzione richiesta è $18 + 5 = 23$

19. I NUMERI DEL DRUIDO [924]

Dal testo possiamo escludere le posizioni $\boxed{a}$, $\boxed{c}$, $\boxed{d}$ ed $\boxed{e}$ per la virgola. Quindi ci resta solo la possibilità di metterla in $\boxed{b}$. Il numero scritto è $\boxed{a}\boxed{,}\boxed{c}\boxed{d}\boxed{e}$.

$\boxed{a}\boxed{,}\boxed{c} = a + \frac{1}{10}c = \frac{1}{20}e$, cioè $20a + 2c = e$ e quindi $20a = e - 2c$. a deve essere per forza 0 e $e = 2c$.

Il numero è della forma $\boxed{0}\boxed{,}\boxed{c}\boxed{d}\boxed{2\cdot c}$, quindi abbiamo le seguenti possibilità:

$\boxed{0}\boxed{,}\boxed{1}\boxed{d}\boxed{2}$, $\boxed{0}\boxed{,}\boxed{2}\boxed{d}\boxed{4}$, $\boxed{0}\boxed{,}\boxed{3}\boxed{d}\boxed{6}$ e $\boxed{0}\boxed{,}\boxed{4}\boxed{d}\boxed{8}$ (N.B il caso con $e = 0$ non è accettabile).

Vediamo per quali $\boxed{d}$ è verificata l'ultima richiesta.

$\boxed{d}\boxed{2}$ è multiplo di $\boxed{1}\boxed{d}$ se $d = 4$: una soluzione è $\boxed{0}\boxed{,}\boxed{1}\boxed{4}\boxed{2}$

$\boxed{d}\boxed{4}$ è multiplo di $\boxed{2}\boxed{d}$ se $d = 8$: una soluzione è $\boxed{0}\boxed{,}\boxed{2}\boxed{8}\boxed{4}$

$\boxed{d}\boxed{6}$ è multiplo di $\boxed{3}\boxed{d}$ mai

$\boxed{d}\boxed{8}$ è multiplo di $\boxed{4}\boxed{d}$ se $d = 9$: una soluzione è $\boxed{0}\boxed{,}\boxed{4}\boxed{9}\boxed{8}$

La soluzione richiesta è: $1000 \cdot (0{,}142 + 0{,}284 + 0{,}498) = 1000 \cdot (0{,}924) = 924$.

20. IL TESORO DEI GALLI [8]

Se il 20% delle monete sono piccole, l'80% delle monete sono grandi. Visto che il 40% delle monete grandi sono d'argento, queste contano per il $\frac{40}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{32}{100} = 32\%$ del totale, e quindi quelle d'oro per il restante 48%. Se x è la percentuale delle monete d'oro, deve accadere che $\frac{80}{100}x = \frac{48}{100}$ e quindi $x = \frac{48}{80} = 0{,}6 = \frac{60}{100} = 60\%$. La percentuale di monete piccole d'oro è quindi il 12% del totale.

Resta un percentuale dell'8% che sono le monete d'argento piccole.

N.B. Il problema poteva essere risolto anche stabilendo in 100 il numero totale delle monete e procedendo calcolando le varie percentuali.